HISTOIRE DU STRUCTURALISME

PERIODES, PRATIQUES, STYLES

Résumé

Ce projet vise l'étude du structuralisme en mathématiques comme phénomène historique, sur la période 1860-1960. Il cherche à dépasser deux modes de lecture plus classiques : une lecture thématisée par les acteurs des phases tardives de ce mouvement, et centrée sur l'analyse des vertus épistémologiques de la méthode structurale ; des travaux d'histoire qui, soit portent sur des structures particulières (plus que sur le structuralisme), soit abordent la question du structuralisme mais se restreignent au cas de l'algèbre. Nous proposons une analyse en termes de pratiques plutôt que de vertus, et une extension du corpus au-delà de l'algèbre.

Notre travail sur l'histoire des théories géométriques nous permet d'identifier une série d'axes de recherche, relatifs (1) au sens des méthodes axiomatiques, (2) au structuralisme comme démarche spécifique orientée vers la résolution de problèmes, et (3) à la comparaison des modalités épistémologiques et historiques de thématisation des notions d'isomorphisme d'une part, de morphisme d'autre part. Le point (1) est en partie un travail de synthèse, les points (2) et (3) constituent un travail largement original. L'entrée par les *pratiques* et la recherche des différences spécifiques ont, par nature, des effets centrifuges. Sans que nous visions le moins du monde une synthèse identifiant une « nature » « du » structuralisme, des réflexions de méthode permettent à la fois de dépasser l'impression d'éclatement et de contribuer au dialogue avec la communauté des historiens et des philosophes des sciences. Ainsi, la notion de « style de raisonnement » fournit-elle une piste d'intégration et un point d'ancrage dans les débats méthodologiques contemporains. Ainsi, le travail d'histoire sur les pratiques mathématiques permet-il d'approfondir le dialogue que nous avons engagé avec la communauté internationale qui se penche sur la « *philosophy of mathematical practice* ».

En vue de la réalisation de ce projet d'ensemble, nous identifions un sous-projet à engager rapidement : celui de l'étude de la trajectoire de réécriture qui lie Elie Cartan et Charles Ehresmann.

Plan

1 Motivations
1.1 Une lecture « mathématicienne » centrée sur les vertus épistémologiques
1.2 Une approche historique centrée sur l'histoire de l'algèbre
2 Axes de recherche
2.1 Axiomes et définitions axiomatiques
2.2 Des problèmes aux structures
2.3 De l'isomorphisme aux morphismes
3 Thèmes de méthode
3.1 Un outil intégrateur : la notion de style de raisonnement
3.2 Un dialogue avec la « *philosophy of mathematical practice* »
4 Un sous-projet à moyen terme : Elie Cartan et Charles Ehresmann
Bibliographie

1 Motivations

Cernons dans un premier temps le projet de recherche en soulignant les apports, mais aussi les limites, de deux approches classiques du structuralisme en mathématique.

1.1 Une lecture « mathématicienne » centrée sur les vertus épistémologiques

Nous entendons ici par « lecture mathématicienne » ce qu'on trouve dans une série de textes – textes programmatiques, analyse des travaux, conférences de vulgarisation, articles polémiques, souvenirs etc., rédigés par des mathématiciens, qui informent et conditionnent l'accès à ces questions pour le lecteur du 21^{e} siècle. Qu'on pense, par exemple, aux présentations des méthodes « modernes » en mathématiques de Hasse en 1930 (Hasse 1986) ou de Weyl en 1932 (Weyl 1995), à *L'architecture des mathématiques* dessinée par Bourbaki (Bourbaki 1948), ou, plus récemment, au bilan proposé par MacLane (MacLane 1996). Il ne s'agit pas seulement d'en appeler ici au dépassement de ces textes – l'objectif va de soi – mais aussi de montrer comment leur difficulté à saisir certains aspects dessine, en creux, des chantiers de recherche.

Ces textes s'accordent sur une caractérisation minimale de la démarche structuraliste : étudier les conséquences de systèmes de relations explicites (axiomes) portant sur des ensembles d'éléments dont la nature n'a pas à être prise en compte ; cette caractérisation s'accompagne bien sûr d'exemples paradigmatiques (groupe, corps, espace métrique, ensemble ordonné). Si l'on s'en tient au cas de l'*Architecture des mathématiques* – ce n'est pas ici le lieu d'une comparaison des textes – deux autres types d'éléments viennent caractériser cette méthode « moderne ». Tout d'abord une série de *caractérisations négatives*, dessinant la figure nouvelle par ce qu'elle n'est pas, ou ce avec quoi elle ne souhaite pas être confondue : elle se veut le contraire du calcul[1] (toujours qualifié d'aveugle, de brut…), l'ennemie du fait isolé ou particulier[2] ; elle ne souhaite pas être réduite à « l'armature d'une logique formelle, unité d'un squelette sans vie » (Bourbaki 1948 47). Ensuite, une longue série de *vertus épistémologiques* lui sont associées : cette méthode moderne fournit « l'intelligibilité profonde » des mathématiques (Bourbaki 1948 37) en exhibant les structures transverses aux disciplines classiques[3] ; elle construit les bons cadres de formulation et d'attaque des problèmes ; elle substitue au chaos des connaissances dispersées d'une mathématique en croissance rapide de grands axes d'organisation permettant une vue d'ensemble[4] ; elle permet, enfin, une merveilleuse économie de pensée et de travail, en évitant de devoir refaire dans chaque contexte des raisonnements fondamentalement identiques [5].

Caractérisation minimale (syntaxique), désignation d'un *extérieur* du structuralisme, liste de vertus ; ce qu'on fait, ce qu'on rejette, ce qu'on gagne à faire ainsi.

Face à ces descriptions – qu'on les juge enthousiasmantes ou schématiques – on peut envisager au moins deux projets qui ne sont pas le nôtre. On peut chercher à approfondir la question de la caractérisation *du* structuralisme en cherchant à préciser sa *nature*, à cerner son *unité*. Pour ce faire, on pourrait par exemple envisager d'utiliser de manière *récurrente* (au sens de Bachelard) les notions de la théorie des catégories ; d'une théorie des catégories vue

[1] Bourbaki fait sienne la formule de Dirichlet : « substituer les idées au calcul » (Bourbaki 1948 47).

[2] Les deux aspects peuvent être conjoints : « (…) moins que jamais, la mathématique est réduite à un jeu purement mécanique de formules isolées. » (Bourbaki 1948 43)

[3] Ce thème de l'intelligibilité est aussi celui mis en avant par Weyl : « We are not very pleased when we are forced to accept a mathematical truth by virtue of a complicated chain of formal conclusions and computations, which we traverse blindly, link by link, feeling our way by touch. We first want an overview of the aim and the road ; we want to understand the *idea* of the proof, the deeper context. » (Weyl 1932 453)

[4] MacLane et Bourbaki se répondent sur ce point : « *The emphasis on mathematical structure has served wonderfully to organize much of mathematics and to clarify some previously confused topics, such as Galois theory, matrix calculation, differential geometry, and algebraic topology* » (MacLane 1996 183) ; « [l'intuition, désormais] domine d'un seul coup d'œil d'immenses domaines unifiés par l'axiomatique, où jadis semblait régner le plus informe chaos » (Bourbaki 1948 43).

comme *vérité* d'un structuralisme enfin pleinement conscient de lui-même. On peut, et ce serait un autre projet envisageable, centrer l'étude sur les vertus, en considérant que ces textes les évoquent sans les définir. Cela ouvre sur un travail en deux temps. D'abord un travail d'*analyse épistémologique* cherchant à préciser les notions d'intelligibilité, de compréhension, de bon cadre, d'unification, d'économie de pensée etc. Ce terrain de recherche est actuellement réinvesti par une certaine philosophie anglo-saxonne des mathématiques, nous y reviendrons plus loin (3.2). Dans un second temps, un travail d'*évaluation* du structuralisme : possède-t-il les belles vertus qu'il affiche ? Si oui, peut-on en rendre raison ?

Ces tâche de définition et d'évaluation ne sont toutefois pas celles que nous nous fixons directement.

Nous souhaitons dans un premier temps mettre entre parenthèses la question des vertus épistémologiques, qui ne nous semble pas fournir un point d'entrée bien éclairant. D'abord parce que les mêmes exemples techniques et les mêmes vertus peuvent être mises au service de projets (peut-être superficiellement) contradictoires. Un exemple suffit : Bourbaki vante l'aspect transversal de la méthode axiomatique, seule capable d'assurer l'unité retrouvée de mathématiques menacées par une expansion rapide et centrifuge ; au même moment, Hasse voit dans les mêmes méthodes un moyen pour autonomiser l'algèbre par rapport au reste des mathématiques, et la détacher d'une algèbre « classique » trop liée aux nombres complexes et à l'analyse. Ensuite, et surtout, parce que l'invocation de ces vertus nous semble peu *spécifique* au structuralisme : rares sont, somme toute, les mathématiciens ayant déclaré préférer les résultats isolés, les calculs aveugles et les exposés confus. On retrouve quasiment mot pour mot des expressions de Bourbaki, MacLane ou Hasse chez des auteurs qu'on ne souhaite pas ranger du côté structural, chez Poincaré par exemple[6]. On cherchera plutôt à saisir la *spécificité* d'une approche structurale (ou d'approches structurales) en les comparant à d'autres approches, *concurrentes*, qui ne se réclament pas moins de l'intelligibilité profonde et de la vue d'ensemble. Il ne s'agira donc pas de préciser le sens visé des vertus évoquées, mais, éventuellement, d'étudier dans quelle mesure leur mention *de fait* permet d'identifier des réseaux ou de cerner des lieux de débat.

---

[5] A propos de la méthode axiomatique : « Son trait le plus saillant (…) est de réaliser une économie de pensée considérable. Les « structures » sont des outils pour le mathématicien. (…) On pourrait donc dire que la méthode axiomatique n'est autre que le « système Taylor » des mathématiques. » (Bourbaki 1948 42)

[6] Ainsi dans sa conférence au congrès international des mathématiciens de 1908 : « Les seuls faits dignes d'attention sont ceux qui introduisent de l'ordre dans cette complexité et la rendent ainsi accessible » (Poincaré 1908 169), et, quelques lignes plus loin : « Pour obtenir un résultat qui ait une valeur réelle il ne suffit pas de moudre des calculs ou d'avoir une machine à mettre en ordre les choses ; ce n'est pas seulement l'ordre, c'est l'ordre inattendu qui vaut quelque chose » (Poincaré 1908 170).

La recherche de spécificité nous semble devoir être conduite en se penchant sur les *pratiques* plutôt que sur les vertus. En un sens, cet aspect des pratiques est un angle mort pour les textes que nous lisons dans ce premier temps. Certes ces textes évoquent les pratiques, mais ces évocations ne nous semblent guère dépasser des généralités. Le travail du mathématicien semble recouvrir trois tâches spécifiques à la nouvelle approche : abstraire, reconnaître, et inventer des structures. *Abstraire*, tout d'abord : isoler quelques traits simples et communs à de nombreux problèmes ; ce travail, nos auteurs le décrivent comme une phase d'analyse[7] et d'abstraction, au sens classique d'oubli des contenus spécifiques. *Reconnaître* ensuite qu'une structure générale intervient dans une situation particulière ; ainsi, après avoir évoqué l'introduction des espaces fonctionnels et des nombres *p*-adiques, Bourbaki y voit « autant de moments décisifs dans le progrès des mathématiques, de tournants où un éclair de génie a décidé de l'orientation nouvelle d'une théorie, y révélant une structure qui ne paraissait pas *a priori* y jouer un rôle » (Bourbaki 1948 43). *Inventer* de nouvelles structures, enfin : « Les structures ne sont immuables ni dans leur nombre ni dans leur essence ; il est très possible que le développement ultérieur des mathématiques augmente le nombre des structures fondamentales, en révélant la fécondité de nouveaux axiomes, ou de nouvelles combinaisons d'axiomes, et on peut d'avance escompter des progrès décisifs de ces *inventions* de structures » (Bourbaki 1948 45). Quant à savoir *comment* on mène à bien ces belles tâches, ce type de texte ne nous le dit guère : on s'y tient aux critères pragmatiques *a posteriori* de « fécondité »[8], à l'évocation de « doigté » d'un chercheur de « grande expérience »[9] ou aux considérations psychologiques en termes d'« intuition »[10].

Cette relative incapacité à aborder la question du « comment » est d'autant plus frappante que les auteurs de ces textes sont eux-mêmes engagés dans l'abstraction, la reconnaissance et l'invention de structures, dans des contextes et selon des procédés dont l'analyse historique peut rendre compte de la spécificité : abstraction chez Weyl en 1913, avec sa notion de surface de Riemann (i.e. de courbe analytique complexe) ; invention de structure : qu'on

---

[7] Sur ce point, les termes de Weyl et de Bourbaki se répondent : « *One separates in a natural way the different aspects of a subject of mathematical investigation, makes its accessible through its own relatively narrow and easily surveyable group of assumptions, and returns to the complex whole by combining the appropriately specialized partial results. This last synthetic step is purely mechanical. The great art is the first, analytic, step of appropriate separation and generalization.* » (Weyl 1995 454) ; « Sous quelle forme va se faire cette opération *[trouver les idées communes à plusieurs théories]* ? C'est ici que la méthode axiomatique va se rapprocher le plus de la méthode expérimentale. Puisant comme elle a la source cartésienne, elle 'divisera les difficultés pour les mieux résoudre' » (Bourbaki 1948 38).

[8] Ainsi chez Weyl : « *Perhaps the only criterion of the naturalness of a severance and an associated generalization is their fruitfulness* » (Weyl 1932 454)

[9] « *If the process is systematized according to the subject matter by a researcher with a measure of skill and "sensitive fingertips" who relies on all the analogies derived from his experience* (…) » (Weyl 1932 454).

[10] « Plus que jamais l'intuition règne en maîtresse dans le genèse des découvertes » (Bourbaki 1948 …)

pense aux fibrés principaux et associés chez Ehresmann (1941-1942) ou aux idéaux de fonctions holomorphes chez Cartan (1940-44, ancêtres des faisceaux analytiques cohérents) ; reconnaissance du rôle de structures dans des domaines où elles ne semblaient pas *a priori* devoir jouer de rôle : utilisation des revêtements pour démontrer des résultats de théorie des algèbres de Lie par Weyl en 1925, introduction des groupes topologiques (et des mesures de Haar) en théorie des nombres par Chevalley et Weil.

1.2 Une approche historique centrée sur l'histoire de l'algèbre

On le devine dans la liste d'exemples que nous venons de donner : notre projet d'histoire des *pratiques* – de pratiques dans lesquelles des mathématiciens reconnaissent explicitement, à partir de la fin des années 1920, une « nouvelle manière » – ne se limite pas au cas des structures algébriques. Pour cerner cet aspect du projet, nous nous appuierons de nouveau sur un texte, en l'occurrence la monographie de Leo Corry : *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structure* (Corry 1996).

La seconde partie de l'ouvrage traite des premières formalisations mathématiques de la notion de structure, chez Ore, Bourbaki puis dans les premières années de la théorie des catégories. Ces questions ont depuis été complétées dans le beau travail de Ralf Krömer sur l'histoire de la théorie des catégories (Krömer 2007), quoiqu'il ait laissé de côté l'apport d'Ehresmann. En termes de corpus et de période d'étude, c'est toutefois sur la première partie de l'ouvrage de Corry que s'articule notre projet. Corry y étudie l'histoire des structures algébriques de Dedekind jusqu'à la *Moderne Algebra* de van der Waerden (1930). On peut souligner plusieurs points que nous souhaitons retenir de cette approche. Ce travail marque une étape dans l'historiographie, en ceci qu'il ne présente pas l'histoire d'une structure algébrique particulière – histoire de la notion de groupe, de corps, d'idéal, d'espace vectoriel – mais s'attaque au problème historique spécifique de la redéfinition disciplinaire de l'algèbre comme étude des structures algébriques : étude du structuralisme en algèbre donc, et non plus histoire des structures de l'algèbre, ou de l'accumulation de connaissances algébriques appelées de toute éternité à se couler, un jour, spontanément, dans un moule structural. Sa description est appuyée sur la distinction, utile et robuste, entre *body of knowledge* (comme ensemble de connaissances, théorèmes etc.) et *image of knowledge* (comme ensemble de catégories de classement des connaissances, mode de sélection des questions légitimes ou non, importantes ou non etc.) ; distinction empruntée à Yehuda Elkana. Il peut ainsi décrire des configurations particulières – par exemple celle représentée par Heinrich Weber, qui

étudie les corps de manière abstraite dans des travaux de recherche, mais intègre les connaissances récentes dans un cadre classique lorsqu'il rédige son *Lehrbuch der Algebra* (1895) ; Corry peut ainsi articuler une accumulation continue du côté du *body of knowledge* et des discontinuités dans l'*image of knowledge*. Troisième point, enfin, dont nous souhaitons souligner l'intérêt, l'approche structurale n'est pas uniquement décrite en termes de noyau dur, caractéristique et minimal (du type : étude décontextualisée des conséquences d'axiomes simples, portant sur des objets auxquels on ne suppose pas de nature propre) ; la gamme des *pratiques typiques* dans lesquelles Corry saisit la marque d'une approche structurale est élargie, pour englober l'étude systématique des situations en termes de sous-structure, d'extension et de quotient ; en termes de structures produit (au sens informel) et de suites de composition ; en termes, enfin, de théorèmes d'isomorphismes, sur le modèle du théorème de structure des groupes abéliens de type fini.

En nous appuyant sur ce travail antérieur, nous disposons ainsi d'éléments clefs qui nous permettent de dégager l'essentiel de notre projet : il s'agit de reprendre le même type de travail, sur la même période (1860-1960), mais en étendant le corpus au-delà de l'algèbre en y incluant : topologie générale et algébrique, analyse fonctionnelle, géométries algébriques et différentielles, théorie des groupes de Lie. Cette description de nos objectifs ne tient toutefois qu'en première approximation et demande immédiatement à être précisée. Pour affiner, nous voulons montrer (1) que l'étude d'autres champs que celui de l'algèbre permet de soulever des questions importantes que Corry ne traite pas. Plus spécifiquement (2), l'approche de Corry, par sa méthode même, s'interdit l'accès à certaines questions.

Nous traiterons le point (1) dans la deuxième partie de la présentation de ce projet. Abordons ici les critiques de méthode. L'approche n'est pas exempte de téléologie, non par naïveté épistémologique, mais par construction : Corry se fixe un point d'arrivée, la *Moderne Algebra* de van der Waerden, et étudie le passé en fonction de ce point d'arrivée. Ceci qui a quatre conséquences. Premièrement, les éléments sont ordonnés selon deux échelles linéairement graduées, selon le degré dont ils s'écartent du point d'arrivée, selon la manière dont ils apportent des résultats ou méthodes appelées à figurer dans l'état final ; la mise en série linéaire, si elle permet de dessiner le mouvement sur une grande période, invite peu aux comparaisons transversales et amène à gommer les spécificités qualitatives inintégrables à la série longue. Deuxièmement, le corpus étudié par Corry reprend celui que van der Waerden et Noether désignent eux-mêmes, dans les années 1920, comme *leur* passé, celui réunissant leurs modèles et leurs ancêtres. Il ne reste du coup rien à dire sur les autres : pas d'extérieur, pas de concurrents (juste des formes moins achevées de soi-même), pas de controverses, pas d'effets

d'éviction. Troisièmement, après que l'étude initiale de Corry sur Dedekind a présenté assez en détail les travaux de recherche sur les nombres algébriques (et, plus rapidement, ceux sur les corps de fonctions algébriques), l'ouvrage porte largement sur des textes de synthèse : manuels, articles-bilans ou textes programmatiques. Ce type d'étude est d'ailleurs parfaitement justifié si l'on met plutôt l'accent sur l'*image of knowledge*, les textes de synthèse constituant un élément clé pour sa formation, sa diffusion (synchronique) et sa transmission (diachronique). Le lien avec le *body of knowledge* s'en trouve toutefois relégué au second plan (sinon pour souligner la relative autonomie des deux plans d'évolution), et peu de pistes sont données pour l'étude des pratiques d'abstraction, de reconnaissance et d'invention de structure. Le risque est de contribuer à renforcer l'image du structuralisme comme simple méthode d'exposition ; comme manière de rédiger des traités jugés, selon les goûts, très propres ou trop propres ; comme art *d'après-coup*, de profilage de résultats obtenus ailleurs et par d'autres moyens. Les exemples que nous citions plus haut (revêtement en théorie des groupes de Lie, groupes topologiques en théorie des nombres etc.) montrent pourtant combien la démarche structurale a aussi été un *ars inveniendi*, dont les ressorts n'ont guère été étudiés ; comme nous le développerons plus loin, nous souhaitons mettre au centre de l'étude la dialectique des problèmes et des structures. Quatrièmement, l'étude de Corry présente une généalogie conceptuelle se déployant dans un pur espace de pensée (et d'écriture). Ainsi, le « succès » du manuel d'algèbre de van der Waerden n'a pas a être évalué autrement que comme succès intellectuel. Il semble que ses seules qualités sont à la fois causes et garantes de sa diffusion ; d'une diffusion qu'on ne se donne pas les moyens d'évaluer quantitativement, ni d'étudier en termes de réception.

2 Axes de recherche

Cette réflexion sur les apports de lectures et travaux classiques nous permet de préciser notre projet de recherche sur le structuralisme en mathématiques comme objet d'histoire. Nous proposons un changement de *corpus* et d'*axe de questionnement*. Le corpus est à élargir en termes de disciplines – au-delà de l'histoire de l'« algèbre abstraite » – tout en conservant les bornes chronologiques choisies par Corry, disons 1860-1960. Nous proposons un double décentrement du questionnement : des vertus vers les pratiques, des pratiques de synthèse didactique vers les pratiques de recherche et de résolution de problèmes.

Présentons trois axes de recherches – non indépendants – qui s'appuient sur les premiers résultats obtenus depuis notre thèse sur *L'émergence du couple local-global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux (1851-1953)*.

2.1 Axiomes et définitions axiomatiques

Comme on l'a vu, le moment de la définition axiomatique d'une structure est largement regardé comme caractéristique de la démarche structuraliste. Un questionnement centré sur les pratiques permet dans un premier temps de souligner la diversité des *sens* donnés à ce moment par les acteurs eux-mêmes.

Plusieurs travaux ont montré la grande diversité des sens possibles du passage à une formulation axiomatique. Ainsi, si l'on prend le cas de Hilbert, Corry (Corry 2004) ou Michael Hallett (Hilbert 2004) ont montré combien ses travaux sur les fondements de la géométrie ou de la physique étaient entrepris dans un esprit différent de celui qui anime, à partir de 1925, le programme « formaliste » de fondement des mathématiques : d'un côté un travail de mise à plat et d'analyse conceptuelle de certaines théories distinguées à la fois par leur maturité et une richesse contentuelle découlant d'un ancrage empirique ; de l'autre un programme visant la mise au point d'un arsenal technique permettant de fonder les mathématiques dans leur ensemble comme système syntaxique aux propriétés raisonnables. Cette variété des sens de l'introduction d'axiomes dans des théories qui s'en passaient jusque là fort bien, nous l'avons étudiée dans des cas particuliers, par exemple celui des axiomes relatifs à la notion de variété différentiable. Les mêmes axiomes, introduits par Veblen et Whitehead en 1931, peuvent successivement être regardés (1) comme exemple de système d'axiomes, à étudier en tant que tel (se posent donc des questions de consistance, d'indépendance etc.) (2) comme axiomes capturant le cœur conceptuel d'une théorie mûre et ouverte, dans un travail de synthèse didactique des apports récents de Weyl, E. Cartan, Hopf, Veblen, Eisenhart, Schouten etc., (3) comme définition axiomatique d'un type d'objets à propos desquels établir quelques grands « théorèmes de structure » tout en commençant à constituer la « boîte à outils » sans laquelle la définition demeure lettre morte. Ces trois temps sont représentés respectivement par Veblen et Whitehead en 1931 (V&W 1931), par les mêmes en 1932 (V&W 1932), enfin par Whitney (Whitney 1936)[11]. Sur la base de ce premier

[11] Sur ce travail, voir notre exposé : « En quel sens Veblen et Whitehead *fondent*-ils la géométrie différentielle ? », séminaire « Riemann » (J.-J. Szczeciniarz org.), REHSEIS / ENS, avril 2009 (date à préciser).

travail, on cherchera à préciser ces trois types d'usage ; on cherchera surtout à utiliser cette distinction comme outil de comparaison et de périodisation pour d'autres structures.
Cette étude est à combiner à un travail d'*histoire des idées* mathématiques, relatif à la distinction progressive des démarches fondationnelles et structuralistes : outils partagés, projets différents. Loin des doxographies et des métaphores de la « prise de conscience », cette étude d'histoire des idées mathématiques doit s'articuler sur des programmes de recherches spécifiques et historiquement situés, analysés en termes d'ancrage institutionnel et de culture de travail. Ce type d'approche – que nous avons tenté dans la troisième partie de notre thèse à propos de la distinction entre « local » et « global » – n'a pas, à notre connaissance, été mis en œuvre pour la distinction entre démarche fondationnelle et méthode structurale.

2.2 Des problèmes aux structures

Nous abordions au point précédent un aspect de l'étude pragmatique du structuralisme, celui relatif au sens donné par les acteurs à un type de gestes théoriques. Aux *raisons* de faire (et au discours réflexif sur ces raisons, relevant de l'histoire des idées), s'ajoutent des *manières* de faire. L'étude des structures est décrite, par exemple chez Bourbaki, avant tout comme un *moyen* pour résoudre des problèmes ; l'efficacité de cette démarche repose sur le fait que les structures simples et générales sont-elles mêmes *abstraites* à partir de problèmes nombreux et contextualisés.
Nous avons commencé à étudier d'un peu plus près cette mystérieuse dialectique des problèmes et des structures dans l'article *From Problems to Structures : the Cousin Problems and the Emergence of the Sheaf Concept*[12]. Retenons ici, non pas les aspects particuliers à cette histoire, mais quelques distinctions que nous avons introduites à cette occasion. Soit un théorème démontré pour une certaine classe de fonctions et un certain type de domaine (en l'occurrence : des fonctions méromorphes de plusieurs variables complexes, et des polycylindres). Nous avons distingué un *usage direct* et un *usage indirect* du problème associé. Chercher à étendre le théorème à une classe plus large de fonctions ou de domaines constitue un usage direct ; dans les années 1930, cet usage est attesté chez Oka pour le second problème de Cousin, chez tous les spécialistes de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes pour le premier problème de Cousin. Face à la difficulté d'attaque du problème direct (jusqu'à l'introduction de la cohomologie des faisceaux en théorie des

fonctions analytiques, par Serre et H. Cartan en 1952), nous avons identifié un usage indirect, consistant à associer au théorème (conjectural) une propriété, elle-même reliée à d'autres par des théorèmes démontrés[13]. Dans notre analyse des articles de Henri Cartan de 1940 et 1944, dans lesquels il introduit un programme d'« étude globale des idéaux de fonctions holomorphes » (structure qu'il introduit à cette occasion), nous avons aussi distingué trois fonctions remplies par différents problèmes : des problèmes-cibles (*target problems*), des problèmes internes (*inner problems*) et des problèmes-pochoirs (*template problems*). Si la première fonction – celle de cible – n'est en rien spécifique à la démarche structurale, les deux autres le sont, et donnent les premiers éléments d'une meilleure compréhension des modes réels de genèse de structures à partir de problèmes. La distinction fournit aussi un outil analytique de comparaison et de périodisation, un même problème pouvant changer de fonction au cours du développement de la théorie.

Une autre partie de ce travail sur l'émergence de la structure de faisceau nous a aussi conduit à emprunter à l'anthropologie culturelle la notion de *bricolage*[14]. Nous entendons par là un mode de résolution de problème ; un mode *instrumental* de résolution de problèmes par assemblage d'éléments *déjà là* ; d'éléments, enfin, utilisés dans une large mesure indépendamment de la nature qui leur était jusque là reconnue, ou du mode d'emploi qui leur était assigné depuis leur première mise au point. Cette notion nous a ainsi permis de mieux décrire le parcours des « partitions de l'unité » sur la période 1937-1955. Nous avions d'ailleurs déjà pointé ce type de phénomène dans notre thèse, sans, alors, avoir explicitement recours à la notion de bricolage. Ainsi, dans notre analyse de l'*Idée de surface de Riemann* de Hermann Weyl, nous avons montré l'importance du rôle des méthodes algébriques de Dedekind et Weber (théorie des corps de fonctions) dans la refonte proposée par Weyl de la théorie « riemannienne » des fonctions algébriques d'une variable complexe, en particulier dans la distinction entre fonctions et différentielles.

Au-delà des nombreuses études de cas à mener en termes de bricolage, la notion elle-même nous semble permettre de lever deux des paradoxes apparents des descriptions usuelles d'une démarche structuraliste, démarche qui (1) se donne à la fois comme *tabula rasa* (par son moment, inaugural, de la définition axiomatique) et comme analyse d'un contenu mathématique riche et divers ; qui (2) atteint une certaine transversalité en purifiant sa

[12] Soumis à *Archive for History of Exact Sciences*, le 19/11/2008.

[13] Un exemple peut aider : nous qualifions d'indirect l'usage du 1er problème de Cousin fait par Cartan lorsqu'il démontre : « Si le premier théorème de Cousin est vrai pour D, D est un domaine d'holomorphie (c'est-à-dire le domaine total d'existence d'une certaine fonction holomophe). » (Cartan 1934: 1286)

démarche. Les paradoxes apparents au niveau des vertus renvoient à une série de pratiques de bricolage et d'hybridation. L'étude s'en trouve délogée du niveau purement épistémologique et replacée dans le champ de l'histoire : l'utilisation du *déjà là* renvoie à un état des lieux perpétuellement produit ; l'activité n'est plus avant tout la synthèse d'un divers idéal, mais le travail de reprise, la réécriture orientée vers la résolution de problèmes.

2.3 De l'isomorphisme aux morphismes.

Cet axe de recherche trouve son origine dans le constat suivant : la notion d'isomorphisme a été utilisée explicitement et considérée comme épistémologiquement fondamentale bien avant que la notion *générale* de morphisme ne soit constituée. Ce constat, qui appelle un travail de périodisation, conduit donc à la question : comment les isomorphismes sont-ils devenus des cas particuliers d'une notion plus générale – et à ce titre première – de morphisme ?
Le travail d'histoire est, sur cet axe encore plus que sur les autres, entièrement devant nous ; donnons deux pistes.
Premièrement, la notion d'homomorphisme est présente assez tôt dans le développement de l'algèbre abstraite (par exemple dans l'*Algebraische Theorie der Körper* de Steinitz (Steinitz 1910)) alors que jusqu'assez tard, du côté des théories géométriques, on n'évoque que les isomorphismes. Certes on y étudie des applications remarquables quoique non inversibles, mais qu'elles ne sont pas vues comme des cas particuliers d'une même notion, transdisciplinaire, de morphisme. Ainsi en 1936, Hopf peut-il encore distinguer deux traditions de recherche en topologie : la « topologie de la forme » – qui n'utilise que la notion d'isomorphisme[15] – et la « topologie de la représentation » – qui étudie les d'applications continues (classes d'homotopie d'applications entre variétés compactes, recherche de plongement dans les espaces euclidiens etc.) (Hopf 1936). Ainsi, nous avons étudié en détail le changement de cadre réalisé par Steenrod en 1942 lorsqu'il a redéfini les classiques « grandeurs tensorielles » de la géométrie différentielle comme des sections de fibrés tensoriels, et ces sections comme des cas particuliers d'application entre ensembles (Steenrod 1942). On peut souligner une autre différence entre l'algèbre et d'autres branches des mathématiques pures. Depuis la fin du 19^{e} siècle, l'« algèbre abstraite » ordonne largement

[14] Ce bref projet n'est pas le lieu d'une discussion sur l'histoire de cette notion. Signalons-en le point de départ dans *La pensée sauvage* de Levi-Strauss (Levi-Strauss 1962).
[15] On serait plus proche de la vérité en parlant de d'« isomorphie » plutôt que de d'« isomorphisme » (en l'occurrence, d'homéomorphisme) : c'est moins un type d'application qu'une relation d'équivalence qui est central dans cette perspective.

son questionnement vers la recherche de « théorèmes d'isomorphismes », alors que ces questions demeurent largement absentes, par exemples, en topologie, en géométrie différentielle ou en analyse fonctionnelle. Ces séries de différences ouvrent des pistes pour comparer et articuler le développement des méthodes structurales dans les différentes branches des mathématiques[16].

Deuxièmement, des indices pour l'instant purement épistémologiques nous permettent de conjecturer une périodisation de la question. La notion d'isomorphisme peut en effet renvoyer à un réseau de notions déjà bien constitué à la fin du 19e siècle : groupe, relecture en termes de groupes des notions d'invariant (algébrique, différentiel, intégral), relecture en termes de groupes et d'invariants de l'architecture des géométries (programme d'Erlangen), analogie entre groupes de Galois et revêtement (chez Poincaré, par exemple), formulation technique en termes de groupes et d'invariants de la question de l'intrinsèque. Si l'on ne réclame pas de lien technique mais qu'on constitue le réseau au niveau de l'histoire des idées, la notion d'isomorphisme peut être rapprochée du renouveau des méthodes axiomatiques, au moyen des thèmes communs d'indifférence envers le sens visé et d'autonomie du syntaxique. Non seulement on peut étudier ces aspects en restant au 19e siècle, mais on peut aussi rendre compte dans leur solide insertion dans un cadre pré-ensembliste structuré par la notion de grandeur variable ainsi que par les présentations par générateurs et relations. Ce point permet aussi de soulever la question du rôle de la structure de groupe parmi les structures algébriques : on peut faire l'hypothèse selon laquelle c'est le même changement de configuration d'ensemble qui, d'une part, fait intégrer les « groupes » à la liste des « structures algébriques » et qui, d'autre part, fait de l'isomorphisme un cas particulier d'homomorphisme ; la question est d'autant plus intéressante qu'elle traverse le bloc algébrique, alors que le point précédent concernait l'articulation de ce bloc aux disciplines non algébriques.

3 Thèmes de méthode

3.1 Un outil intégrateur : la notion de style de raisonnement

[16] Nous interviendrons sur ce point dans l'exposé « *Structures without morphisms ?* », dans le cadre du *workshop* « *Category Theory and Related Fields : History and Beyond* » (R. Krömer, C. MacLarty, M. Wright org.), MFO Oberwolfach, 15-21 février 2009.

La présentation des axes de recherche confirme ce qui transparaissait dans l'exposé des motifs : notre approche du structuralisme comme objet d'histoire ne postule pas l'unité séculaire d'un projet structuraliste, pas plus qu'elle ne vise à caractériser une nature « du » structuralisme. Le travail ne peut au contraire, dans un premier temps, que procéder de manière centrifuge : utiliser des comparaisons systématiques pour mettre au jour la *spécificité* de pratiques de recherche et de synthèse ; pour identifier les articulations *temporaires* entre des débats épistémologiques, des programmes de recherches, des réseaux institutionnels et des modes d'écriture ; pour souligner l'*hétérogenèse* de ce qui se donne pour pur etc. Il ne s'agit pas là d'une posture de soupçon ou d'une réaction au ton volontiers dogmatique de certaines présentations des « mathématiques des structures ». La question est de méthode : il faut d'abord distinguer, pour que la question des articulations réelles puisse être ensuite abordée ; et l'on n'a pas à supposer *a priori* que tout doive finir par être articulé au sein d'un ensemble unitaire. Les métaphores wittgensteiniennes de la tresse – solide sans qu'un seul fil la parcoure entièrement ; du jeu – dont on applique les règles sans devoir d'abord les expliciter, et de la ressemblance de famille, conservent, à cet égard, leur valeur antidogmatique. Des historiens des mathématiques contemporaines, tel Moritz Epple, ont pu chercher à en dériver des pistes de méthode pour asseoir une perspective pragmatique (Epple 1994)[17].

On ne peut toutefois faire l'économie d'une réflexion sur les pistes d'*intégration*, d'articulation et de saisie des formes de cumulativité ; on trouve de telles pistes dans des travaux qui n'ont rien de dogmatiques ou de réccurents. Un exemple riche est ainsi fourni par le travail récent d'Olivier Darrigol, en histoire de la physique, qui propose un mode d'articulation d'ensembles théoriques complexes en termes de *modules* (Darrigol 2008). Présentons ici brièvement une autre approche, d'ailleurs nullement exclusive de l'approche modulaire. La notion de *style de raisonnement* de Ian Hacking nous semble fournir une piste prometteuse[18]. Elle a d'abord le double avantage de partir des mêmes options générales de méthode, et d'avoir contribué à produire des travaux historiques importants, en l'occurrence en histoire des statistiques et probabilités (Hacking 1990). Héritier en cela de Foucault, Hacking caractérise des styles de raisonnements qui sont des entités collectives (par opposition aux styles individuels : le style de Proust, de Matisse etc.), styles qui dessinent *simultanément* le type d'objet sur lequel les énoncé portent, la forme de ces énoncés et leurs

[17] Notons que, dans cette série de textes aux ambitions clairement méthodologiques, Epple s'adresse autant aux philosophes des mathématiques qu'aux historiens : « *Unfortunately, questions of mathematical pragmatics are still rather unexplored in recent philosophy of mathematics* » (Epple 1997 197).
[18] Cf. (Hacking 1991) et (Hacking 2008).

conditions de validité. Son travail sur l'histoire des statistiques lui permet d'illustrer le développement à long terme d'un style de raisonnement spécifique, intégrant à un schéma macro-historique des études de micro-histoire[19] sur des épisodes importants. Les deux temps ne sont pas contradictoires, moyennant une thèse d'autonomisation des styles envers les conditions particulières d'émergence ou de première formulation. Loin de clore facilement le débat, cette thèse d'autonomisation ouvre un champ d'étude historique, celui des techniques d'auto-justification et de stabilisation d'un style[20]. La finesse conceptuelle (dont il n'est pas lieu de rendre ici compte) et la réussite historiographique ne doivent pas masquer les difficultés de ce que serait une transposition à notre problématique propre : les échelles de temps sont différentes ; la question de l'« objectivité », fondamentale chez Hacking, est peu transposable aux mathématiques pures au 20e siècle ; la richesse d'interaction, dans le développement historique des probabilités et statistiques, avec les questions sociales et techniques est sans équivalent du côté du style structural.

Mais il ne s'agit pas de transposer, et le jeu des écarts est, à cet égard, plus stimulant que handicapant. L'analyse en termes de formation et stabilisation d'un style collectif de raisonnement invite au travail sur la longue durée et nous ouvre deux pistes d'articulation. Premièrement, elle invite, sur la fin de la période 1860-1960, à intégrer l'émergence du langage et de la théorie des catégories comme étape (à caractériser) et non comme vérité (enfin révélée) du structuralisme. Deuxièmement, elle invite à comparer le style de raisonnement structural à d'autres styles concurrents, avec lesquels elle cohabite ou qu'elle a pu historiquement éclipser ; c'est plutôt vers le début de notre période d'étude (la deuxième moitié du 19e siècle) que nous sommes alors renvoyés. Signalons qu'un travail comparatif utilisant une opposition entre « style abstrait » et « style concret » a été mené sous forme d'étude de cas par M. Epple (Epple 1997), ce « style abstrait » partageant certains trait du style de raisonnement « par les structures » que nous cherchons à décrire.

3.2 Un dialogue avec la « philosophy of mathematical practice »

Le rejet de l'approche par les vertus *comme angle d'attaque* ne signifie pas le rejet de principe du questionnement épistémologique. On peut, ici aussi, chercher à compléter un premier

[19] « micro » pouvant recouvrir des échelles de temps diverses : depuis quelques années (un débat en 1825 à la chambre des communes sur les tarifs d'assurance maladie des sociétés d'entraide ouvrières) jusqu'à près d'un siècle (analyse de la réception en Allemagne, dans la seconde moitié du 19e siècle, des statistiques sociales *à la* françaises).

[20] On retrouve au passage les « formes d'additivité » foucaldiennes (Foucault 1969 163)

moment proprement historique et dont le mouvement naturel est centrifuge pour engager un dialogue avec certains secteurs de la réflexion épistémologique ou philosophique ; nous y sommes déjà engagés[21], et comptons poursuivre.

Prévenons d'emblée une confusion possible. Depuis une trentaine d'année se développe dans le monde de la philosophie analytique une position qui se nomme « *structuralism* »[22] : quoique le lien avec la mathématique des structures soit réel, les questionnements sont de nature ontologique ou fondationnelle ; à ce titre, il n'entre pas dans notre projet d'y contribuer directement.

Les liens sont par contre nombreux qui peuvent se nouer entre notre travail et la famille de recherches qui, dans la philosophie des mathématiques anglo-saxonne, se reconnaît sous l'étiquette de « *philosophy of mathematical practice* » : les mathématiques y sont interrogées philosophiquement moins comme système idéal que comme activité pratiquée par les mathématiciens[23]. Ceci recouvre deux grands types de questionnement : l'un plus proche des sciences cognitives et de la philosophie de l'esprit (qu'on pense aux travaux de Marcus Giaquinto sur la visualisation), n'est pas non plus celui avec lequel nous envisageons un dialogue direct. L'autre porte sur la manière dont les mathématiciens font et justifient des choix (par exemple de méthode) ; évaluent des résultats ou des preuves selon des critères qui ne se réduisent pas à la validité ou la rigueur.

Notre projet d'histoire du structuralisme nous semble porteur de deux formes d'interventions dans ce champ philosophique.

Premièrement, la réflexion sur les méthodes de l'histoire nous a conduit dans le champ de la pragmatique : bricolage conceptuel, réécriture, usage des problèmes, modes d'abstraction[24] … autant de termes qui désignent à la fois des outils pour l'historien au travail et des concepts à clarifier à un niveau supérieur d'abstraction.

---

[21] L'année 2008-2009 est pour nous une année de confrontation directe entre histoire et philosophie des mathématiques, dans le cadre d'une bourse de post-doctorat associée à la chaire d'excellence senior ANR du professeur Mic Detlefsen, projet *Ideals of Proof* : http://www.univ-nancy2.fr/poincare/idealsofproof

[22] Un panorama des travaux de cette ligne de recherche peut être trouvé dans le numéro spécial de *Philosophia Mathematica* 3 (vol.4), 1996, consacré au structuralisme. Une synthèse récente est disponible dans le *Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* de S. Shapiro (Hellman 2005). Pour une critique mathématicienne de ces questionnements, (MacLarty 2007).

[23] Pour un panorama récent, cf. (Mancosu 2007).

[24] La question de l'abstraction – de ses modalités, de sa valorisation (ou de sa dévalorisation) dans des cultures épistémologiques – constitue un nouvel axe de recherche pluriannuel pour l'équipe REHSEIS (UMR 7596 CNRS – Paris 7). Ce travail transversal fait suite à celui sur une autre catégorie épistémique, celle de « généralité ». Sur ce dernier thème, un ouvrage collectif est en préparation, dont nous sommes l'un des trois responsable (aux côtés de Karine Chemla et David Rabouin) : *Handbook on Generality in Mathematics and the Sciences* ; nous y donnons un chapitre « *Questions of Generality as Probes into Nineteenth Century Analysis* ».

Deuxièmement, la question du structuralisme rencontre de manière privilégiée les thèmes qui sont ceux du second type de questionnement présenté plus haut, celui relatif aux normes rationnelles de choix et d'évaluation qui sous-tendent l'activité mathématicienne. Nous ne pouvons guère dépasser ici le stade de l'allusion, en évoquant trois de ces thèmes : (1) celui de la *pureté* des méthodes (Detlefsen 2007)[25], dont le lien avec les versions programmatiques du structuralisme demeurent largement à démêler[26] ; (2) celui de la compréhension mathématique (*mathematical understanding*)[27], d'ailleurs étroitement lié dans la tradition analytique à celui de l'unification (Hafner & Mancosu 2007) ; (3) celui de l'évaluation des définitions et des cadres (question du *proper/better setting*, questions de *fruitfulness/naturalness of definitions*), dont les questions font directement écho – sur un plan philosophique – aux pratiques d'invention, de modification et de stabilisation de structures. Sur ce dernier point, nos préoccupations d'historiens rencontrent directement celles dont les travaux récents de Jamie Tappenden, du côté de la philosophie, sont porteuses[28].

4 Un sous-projet à moyen terme : Elie Cartan et Charles Ehresmann

L'étude de l'articulation des travaux d'Elie Cartan (1869-1951) et Charles Ehresmann (1905-1979) nous semble un bon point d'entrée pour la mise en œuvre de ce projet de recherche, pour deux raisons : elle s'appuie sur un premier travail portant sur Elie Cartan ; elle croise plusieurs des axes de recherche généraux identifiés plus haut.

Premièrement, ce sous-projet s'appuie (en le dépassant de beaucoup) sur un premier travail, dont l'essentiel se trouve dans notre article *Passer au global : le cas d'Elie Cartan, 1922-1930* [29]. Nous y étudions les modalités d'irruptions de problématiques globales dans les théories dont Elie Cartan est l'un des pionniers dans les années 1920 : théorie des connexions et des « espaces généralisés », théorie des groupes et algèbres de Lie. On pourrait rendre compte du travail de Cartan dans cette période comme d'un simple enrichissement progressif

[25] Nous intervenons à ce sujet aux rencontres 2009 de l'*Americal Mathematical Society* : « *What is at stake in Weierstrass' criticism of Riemann's function theory ?* », Special Session on History of Mathematics, 2009 AMS-MAA joint Mathematics Meeting, Washington D.C., 5-8 January 2009.

[26] Ainsi deux textes très proches sur beaucoup de points, celui de Hasse sur les « méthodes modernes en algèbre » (Hasse 1986) et celui de Bourbaki sur l'architecture des mathématiques (Bourbaki 1948) mettent respectivement l'accent sur la pureté des méthodes et sur les démarches transversales garantes de l'unité des mathématiques.

[27] Nous sommes intervenu sur ce point dans le cadre du *Workshop* « *Mathematical Understanding* », Université Paris 7 (département HPS), 9-13 Juin 2008, avec un exposé sur : « *Making Sense of it with Structures : the case of Charles Ehresmann* ».

[28] (Tappenden 2005), Tappenden in (Ferreiros & Gray 2006), Tappenden in (Mancosu 2007)

[29] Soumis à la *Revue d'Histoire des Mathématiques* le 3 mars 2008.

du questionnaire : prise en compte progressive du rôle de la topologie de la variété dans la structure de son groupe d'holonomie, passage de problèmes centrés sur les algèbres de Lie (et leurs représentations linéaires) à des problèmes intégrant les questions de topologie et de géométrie des groupes Lie, notion d'invariant intégral (d'un espace homogène) progressivement mise au service de l'étude de la topologie (thème approfondi par de Rham). Nous montrons toutefois que cet enrichissement passe par une discontinuité, en 1925, qu'on peut en première approximation décrire comme la substitution d'une polarité *local – global* à une polarité *infinitésimal – fini*. Cette étape dans l'œuvre de Cartan est mise en relation avec les travaux contemporains de Hermann Weyl et Otto Schreier.

Par ailleurs, nous abordions plus succinctement dans notre thèse la manière dont Charles Ehresmann, élève de Cartan, prolonge les travaux de son maître au début des années 1940 en proposant sa notion d'espace fibré. Une étude sérieuse de la trajectoire d'Ehresmann appelle un approfondissement considérable de ces premiers travaux : nous n'avons pour l'instant guère étudié l'œuvre d'Ehresmann au-delà de 1950 ; nous avons principalement étudié les aspects topologiques[30], laissant jusqu'ici de côté les aspects différentiels (connexions, feuilletages, jets, structures infinitésimales) ; nous n'avons pas du tout abordé les reformulations et les prolongements dans le langage des catégories, qui constituent la seconde partie de l'œuvre mathématique d'Ehresmann[31].

Une deuxième raison nous fait choisir cette entrée dans le projet d'ensemble : il permet d'aborder plusieurs des points que nous avons identifiés comme pertinents pour l'histoire du structuralisme. Indiquons en deux : celui des pratiques d'abstraction, celui des frontières du structuralisme (qu'on lui assigne ou qu'il se reconnaît).

Premier point, c'est le plus évident, on dispose dans ce cas d'une *série longue* présentant les différents cas de figure : passage aux structures – à partir d'un travail d'Elie Cartan qui n'est ni structural, ni, nous l'avons montré, conçu dans un cadre ensembliste ; invention de structure ; reconnaissance du rôle d'une structure dans des problèmes où on ne la faisait pas classiquement intervenir. La longueur de cette série permet de travailler sur périodisation, Ehresmann n'agissant pas dans le même contexte dans les années 30 (réécriture directe des notions de Cartan), les années 50 (reprises abstraites et recherche d'intrinséquéité dans un cadre encore ensembliste) puis à partir des années 60 (travail avec et sur le langage des

[30] En comparant, en particulier, sa notion d'espace fibré avec celles de Seifert et Threlfall, de Hopf, de Whitney et de Steenrod. Cf. chapitre 14 de (Chorlay 2007).

[31] Nous disposons pour caractériser ces reformulations d'éléments de comparaison de long terme, puisque nous avons travaillé dans notre thèse sur l'histoire longue de la notion de variété chez Riemann (chapitre 1), Neumann

catégories). Cette série longue permet aussi de travailler sur un aspect spécifique de la *pratique* mathématique : moins que de bricolage ou d'hybridation, il s'agit ici de longues séries de reprises et de *réécritures*[32]. Les outils pour analyser cette pratique ne nous sont pas encore connus.

Deuxième point, ce cas permet d'étudier ce que nous avons décrit dans la première partie de cet exposé comme les limites et l'extérieur du structuralisme. Une première limite est celle de l'abstraction, plus précisément, de l'*abstract nonsense*. Il ne s'agit pas ici d'évaluer, mais de mettre au jour les systèmes collectifs de jugement et leur évolution historique. Le cas d'Ehresmann pourra ici être rapproché d'autres cas où les limites d'une certaine abstraction « légitime » ou « fructueuse » ont pu sembler avoir été franchies, par exemple celui de Dedekind lorsqu'il introduisit la structure de *Dualgruppe* (cf. (Corry 1996), chap.2, §3). Ce travail d'histoire sur les limites de l'abstraction légitime fait clairement partie de ceux qui peuvent servir de point de dialogue avec les philosophes de la pratique mathématique. Une seconde limite est celle du « calcul », qu'on a vu systématiquement rejeté dans les textes promouvant les méthodes « modernes ». On devra ici distinguer, d'une part, le souci (partagé) d'intrinséquéité des notions, d'autre part, le mode d'écriture qui change de manière radicale de Cartan à Ehresmann (puis au sein de l'œuvre d'Ehresmann) ; une comparaison entre les manières dont Ehresmann et Lichnerowicz exposent la géométrie différentielle permettra ici de nuancer l'idée d'un développement nécessaire et linéaire vers moins de formules. Sur un autre plan, la question du calcul permet de revenir sur le travail d'Elie Cartan. Il s'agira ici, et cela n'a rien de paradoxal, de partir du mode d'élimination des calculs mis en œuvre par Ehresmann pour mieux caractériser la manière dont Cartan développe ses concepts non pas en dépit mais *dans* et *par* le calcul. Cela apportera un éclairage sur ce que nous avions identifié dans le troisième axe général de recherche : en effet, Cartan n'évolue pas dans des mathématiques peu conceptuelles ou peu architecturées ; mais il travaille dans un cadre qui est celui mis en place dans le dernier tiers du 19^{e} siècle, de ce cadre dont Poincaré est un représentant éminent et que nous avons rapidement esquissé en évoquant la centralité des notions de groupe et d'invariant.

---

et Klein (chapitre 2), Poincaré (chapitre 3), Hermann Weyl (chapitres 9 et 11), ainsi que sur la notion de groupe de Lie telle que Lie lui-même la met en place (chapitre 6).

[32] On s'en convainc aisément en contemplant le schéma proposé à la 5ème page du diaporama réalisé par Andrée Ehresmann et J.-P. Vanbremeersch à l'occasion du centième anniversaire de la naissance du maître : http://pagesperso-orange.fr/vbm-ehr/ChEh/articles/ehr/ehresmann.PDF

Quelque riche que nous semble ce sous-projet, il ne constitue clairement qu'une pièce d'un ensemble beaucoup plus vaste. Du point de vue chronologique il met principalement en lumière la seconde partie de notre période d'étude (1860-1960). Les questions de pratique des problèmes et du sens de la démarche axiomatique n'y semblent pas centrales. Du point de vue disciplinaire, enfin, l'algèbre, la théorie des nombres, l'analyse fonctionnelle ou même la géométrie algébrique n'y jouent vraisemblablement que des rôle, au mieux, mineurs.

Bibliographie

Bourbaki N., 1948. L'architecture des mathématiques, in F. Le Lionnais (ed.) *Les grands courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud, 1948. pp.35-47.

Cartan H., 1934. Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes, *CRAS* **199** (1934), 1284-1287.

Chorlay R., 2007. *L'émergence du couple local-global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux (1851-1953)*, Thèse d'histoire des mathématiques, Université Denis Diderot, Paris, 2007.

Corry L., 1996. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structure*, Science Networks – Historical Studies **17,** Birkhäuser, Boston, 1996.

Corry L., 2004. *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918)*, Kluwer, Dordrecht, 2004.

Darrigol O., 2008. The Modular Structure of Physical Theories, *Synthèse* **162**(2) (2008), 195-223.

Detlefsen M., 2007. Purity as an Ideal of Proof, in [Mancosu 2007]. pp. 248-277.

Epple M., 1994. Das bunte Geflecht der mathematischen Spiele, *Mathematische Semesterberichte* **41** (1994), 113-133.

Epple M., 1997. Styles of Argumentation in Late 19th Century Geometry and the Structure of Mathematical Modernity, in M. Otte & M. Panza (eds.) *Analysis and Synthesis in Mathematics*, Kluwer, Dordrecht, 1997. pp. 177-198.

Ferreiros J., Gray J., 2006. *The Architecture of Modern Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 2006.

Foucault M., 1969. *L'archéologie du savoir*, Bibliothèque des sciences humaines, Gallimard, Paris, 1969.

Gray J. 1992. The Nineteenth-Century Revolution in Mathematical Ontology, in *D. Gillies* (ed.) *Revolutions in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1992. pp. 226-248.

Gray J., 2004. Anxiety and Abstraction in Nineteenth-Century Mathematics, *Science in Context* **17**(2) (2004), 23-48.

Hacking I., 1990. *The Taming of Chance*, Oxford University Press, Oxford, 1990.

Hacking I., 1991. Statistical Language, Statistical Truth and Statistical Reason : The Self-Authentification of a Style of Reasoning, in E. McMullen (ed.) *Social Dimensions of Sciences*, University of Notre-Dame Press, 1991. pp. 130-157.

Hacking I., 2008. Style pour historiens et philosophes (trad. V. Guillin), in J.-F. Braunstein *L'histoire des sciences : méthodes, styles et controverses*, Vrin, Paris, 2008.

Hafner J., Mancosu P., 2007. Beyond Unification, in [Mancosu 2007]. pp. 209-247.

Hasse H, 1986. The Modern Algebraic Method (trad. A. Shenitzer du texte de 1930), *Mathematical Intelligencer* **8**(2) (1986), 18-23.

Hellman G., 2005. Structuralism, in S. Shapiro *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, Oxford, 2005.

Hilbert., 2004. *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry (1891-1902)*, M. Hallett et U. Majer (editeurs scientifiques), Springer, New-York, 2004.

Hopf H., 1936. Quelques problèmes de la théorie des représentations continues, *L'enseignement mathématique* **35** (1936), 334-347.

Krömer R., 2007. *Tool and Object : A History and Philosophy of Category Theory*, Birkhäuser, Boston, 2007.

Levi-Strauss C., 1962. *La pensée sauvage*, Plon, Paris, 1962.

Mac Lane S., 1996. Structures in Mathematics, *Philosophia Mathematica* **3**(4), 1996, 174-183.

MacLarty C., 2007. What Structuralism Achieves, in [Mancosu 2007]. pp. 500-522.
Mancosu P., 1996. *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Oxford Univesity Press, New-York, 1996.
Mancosu P., 2007. *The Philosophy of Mathematical Practice*, Clarendon Press, Oxford, 2007.
Poincaré H., 1908. L'avenir des mathématiques, *Atti del IV congresso internazionale dei matematici, vol.1* (Roma, 6-11 Aprile 1908), Accademia dei Lincei, Rome, 1909. pp.167-182.
Steenrod N., 1942. Topological Methods for the Construction of Tensor Functions, *Annals of Mathematics* **43**(1) (1942), 116-131.
Steinitz E., 1910. Algebraische Theorie der Körper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **137** (1910), 167-309.
Tappenden J., 2005. Proof Style and Understanding in Mathematics : Visualization, Unification and Axiom Choice, in K. Jorgensen, P. Mancosu, S. Pedersen (eds.) *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, Synthese Historical Library, Springer, Dordrecht – New-York, 2005. pp. 147-213.
Veblen O, Whitehead J.H.C., 1931. A Set of Axioms for Differential Geometry, *Proc. NAS* **17**(10) (1931), 551-561.
Veblen O., Whitehead J.H.C., 1932. The Foundations of Differential Geometry, *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics* **29**, Cambridge UP, London, 1932.
Weyl H., 1919. *Die Idee der Riemannschen Fläche* (2ter Auflage), Teubner, Leipzig, 1919 = Die Idee der Riemannschen Fläche (R. Remmert (ed.)), *Teubner Archiv zur Mathematik* **5**, Teubner, Leipzig, 1997.
Weyl H., 1995. Topology and Abstract Algebra as Two Roads of Mathematical Comprehension (trad. A. Shenitzer du texte de 1932), *Amer. Math. Monthly* **102**(5), 453-460, et **102**(7), 646-651.
Whitney H., 1936. Differentiable Manifolds, *Ann. Math.* **37**(3) (1936), 645-680.